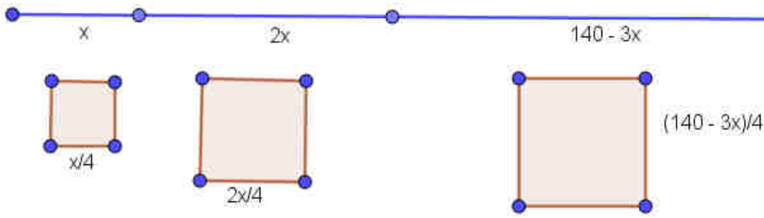
## OPCIÓN A

**1.-** Se dispone de un hilo metálico de longitud 140 m. Se quiere dividir dicho hilo en tres trozos de forma que la longitud de uno de los trozos sea el doble de la longitud de otro y tal que, al construir con cada uno de los tres trozos de hilo un cuadrado, la suma de las áreas de los tres cuadrados sea mínima. Encontrar la longitud de cada trozo. (2,5 puntos)




Es un problema de optimización.

Función a optimizar Área = A(x) = área cuadrado_1 + área cuadrado_2 + área cuadrado_3 =
$= (x/4)^2 + (x/2)^2 + [\ (140 - 3x)/4\ ]^2$

Si $A'(a) = 0$ y $A''(a) > 0$, entonces $x = a$ es un mínimo relativo de A(x).

$A'(x) = 2\cdot(x/4)\cdot(1/4) + 2\cdot(x/2)\cdot(1/2) + 2\cdot[\ (140 - 3x)/4\ ]\cdot(-3/4) = x/8 + x/2 - 3\cdot(140 - 3x)/8.$

De $A'(x) = 0 \rightarrow x/8 + x/2 - 3\cdot(140 - 3x)/8 = 0 \rightarrow x/8 + x/2 = 3\cdot(140 - 3x)/8 \rightarrow x + 4x = 3\cdot(140 - 3x) \rightarrow$
$\rightarrow 14x = 420 \rightarrow x = 420/14$ m = 30 m.

Veamos que es mínimo $A''(x) = 1/8 + 1/2 + 9/8 > 0$, luego es mínimo independientemente del valor de "x"

**Dimensiones pedidas de cada trozo son: x = 30 m., 2x = 60 m y (140 – 3x) = 50 m.**

**2.-** Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + ky + kz = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + 2y + 4z = 2 \end{cases}$

a) Discutir el sistema según los valores del parámetro k. (1,25 ptos)
b) Resolver el sistema para k = 1 (1,25 ptos)

a)
Discutir el sistema según los valores del parámetro k.

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & k & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & k & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 - F_2 \\ \\ F_3 - F_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & k-1 & k-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera columna $= 0 - (1)\cdot(3k - 3 - k + 1) + 0 = -2k + 2.$

De $|A| = 0 \rightarrow -2k + 2 = 0$, de donde k = 1.

Si **k ≠ 1,** rango(A) = rango(A*) = 3 = nº de incógnitas**, y el sistema es compatible y determinado, y el sistema tiene una única solución.**

Si **k = 1,** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$, tenemos que rango(A) = 2.

En A* como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, por tener dos filas iguales, por tanto rango(A*) = 2

Tenemos **rango(A) = rango(A*) = 2 < nº de incógnitas, y el sistema es compatible e indeterminado y el sistema tiene infinitas soluciones (más de una solución).**

b)

Resolver el sistema para k = 1

Hemos visto en el apartado (a) que, si **k = 1**, teníamos rango(A) = rango(A*) = 2 < nº de incógnitas**, y el sistema era compatible e indeterminado y tenía infinitas soluciones (más de una solución).**

Como el rango es 2 tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas, tomamos la 2ª y la 3ª que son las ecuaciones con los que he formado el menor de orden 2 distinto de cero para determinar el rango de A.

$x + y + z = 1. \quad \rightarrow \quad x + y + z = 1$

$x + 2y + 4z = 2.$ (F2 – F1) $\rightarrow \quad y + 3z = 1$, tomando **$z = b \in$** R, tenemos **$y = 1 - 3b$**. Entrando en la 1ª ecuación tenemos: $x + (1 - 3b) + b = 1 \rightarrow$ **$x = 2b$.**

Las infinitas soluciones del sistema son **(x,y,z) = (2b, 1 - 3b, b)** con **b $\in$ R**

**3.-** a) Halle la ecuación del plano $\pi$ que pasa por los puntos A(-1,5,0) y B(0,1,1) y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - 3z - 1 = 0 \end{cases}$ (1,5 ptos)

b) Escribir la ecuación de una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto medio del segmento AB (1 pto)

a) Halle la ecuación del plano $\pi$ que pasa por los puntos A(-1,5,0) y B(0,1,1) y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - 3 = 0 \\ 2x - 3z - 1 = 0 \end{cases}$.

Un vector director **u** de la recta r es el producto vectorial (x) de los vectores normales $\mathbf{n_1}$ y $\mathbf{n_2}$ de los planos que la determinan.

$\mathbf{u} = \mathbf{n_1}\mathbf{x}\mathbf{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-6) - \mathbf{j}(-9) + \mathbf{k}(-4) = (-6, 9, -4).$

Para el plano $\pi$ necesitamos un punto, el punto B(0,1,1) y dos vectores independientes, uno el director de la recta “r” el **u** = (-6, 9, -4) y el otro el **AB** = **b** – **a** = (1, -4, 1).

El plano pedido es $\pi \equiv \det(\mathbf{BX}, \mathbf{u}, \mathbf{AB}) = \det(\mathbf{x} - \mathbf{p}, \mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}) = \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ -6 & 9 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 =$

$= (x)(9 + 16) - (y - 1)(-6 + 4) + (z - 1)(24 - 9) = 0 =$ **$25x + 2y + 15z - 17 = 0$**.

b)

Escribir la ecuación de una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto medio del segmento.

Una ecuación paralela a r tiene su mismo vector director **u** = (-6, 9, -4), y el punto medio del segmento AB es M(-1/2, 3, 1/2).

**La recta pedida en forma vectorial es: $s \equiv (x, y, z) = (-1/2, 3, 1/2) + b\cdot(-6, 9, -4)$ con $b \in$ R.**

**4.-** Se sabe que el 30% de todos los fallos en las tuberías de plantas químicas son ocasionados por errores del operador.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 fallos en una planta química, exactamente 5 se deban a errores del operador? (1.25 ptos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o más fallos de 20 encontrados en una planta química, se deban a errores del operador? (1.25 ptos)

Recordamos que si realizamos **n** veces (20) un experimento en el que podemos obtener éxito, F, con probabilidad **p** ( p(F) = 0’3) y fracaso, $F^C$, con probabilidad **q** (q = 1 – p = 1 – 0’3 = 0’7), diremos que estamos ante una distribución binomial de parámetros **n** y **p**, y lo representaremos por **B(n;p)**.

Es decir nuestra variable **X sigue una binomial B(n;p)** = **B(20; 0’3)**.
En este caso la **probabilidad de obtener k éxitos**, que **es su función de probabilidad**, viene dada por:

$$\mathbf{p(X = k) = (20 \text{ sobre } k)\cdot 0'3^{k}\cdot 0'7^{(20-k)} = \binom{20}{k}\cdot 0'3^{k}\cdot 0'7^{(20-k)}.}$$

****** (n sobre k) = $\binom{n}{k}$ = (n!)/(k!.(n - k)!) con n! el factorial de “n”. En la calculadora “ n tecla **nCr** k “

a)
¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 fallos en una planta química, exactamente 5 se deban a errores del operador?

En nuestro caso piden $\mathbf{p(X = 5) = \binom{20}{5}\cdot 0'3^{5}\cdot 0'7^{15} = \frac{20!}{5!\cdot 15!}\cdot 0'3^{5}\cdot 0'7^{15} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15!}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 15!}\cdot 0'3^{5}\cdot 0'7^{15} =}$
$\mathbf{= 15504\cdot 0'3^{5}\cdot 0'7^{15} \cong 0'17886.}$

b)
¿Cuál es la probabilidad de que 2 o más fallos de 20 encontrados en una planta química, se deban a errores del operador?

En nuestro caso piden $\mathbf{p(X \geq 2) = 1 - p(X < 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) =}$
$= 1 - \binom{20}{0}\cdot 0'3^{0}\cdot 0'7^{20} - \binom{20}{1}\cdot 0'3^{1}\cdot 0'7^{19} = 1 - \frac{20!}{0!\cdot 20!}\cdot 0'3^{0}\cdot 0'7^{20} - \frac{20\cdot 19!}{19!\cdot 1}\cdot 0'3^{1}\cdot 0'7^{19} =$
$= 1 - 1\cdot 1\cdot 0'7^{20} + 20\cdot 0'3^{1}\cdot 0'7^{19} \cong$ **0’9924.**

## OPCIÓN B

**1.** Calcular las asíntotas y extremos relativos de la función $y = 3x + \dfrac{3x}{x - 1}$. (2,5 puntos)

La función dada es $f(x) = 3x + \dfrac{3x}{x-1} = \dfrac{3x^2 - 3x + 3x}{x-1} = \dfrac{3x^2}{x-1}$

*Veamos las asíntotas de la gráfica de f.*

x = a es una asíntota vertical (A.V.) de f(x) si $\lim_{x\to a+} [ (f(x) ] = \infty$

Como $\lim_{x\to 1-}\left(\dfrac{3x^2}{x-1}\right) = \dfrac{3}{0^-} = -\infty$; la recta **x = 1** es una A.V. de f(x). Posición relativa $\lim_{x\to 1+}\left(\dfrac{3x^2}{x-1}\right) = \dfrac{3}{0^+} = +\infty$

Como la función f es un cociente de funciones polinómicas, con el grado del numerador una unidad más que el grado del denominador, f(x) tiene una asíntota oblicua (A.O.) de la forma $y = mx + n$ con $m = \lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$ y $n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$, y es la misma en $+\infty$ y en $-\infty$. Como hay A.O. en $\pm\infty$, f no tiene asíntotas horizontales (A.H.) en $\pm\infty$.

También se puede calcular la A.O. dividiendo numerador entre denominador y la A.O. es el cociente de la división entera.
Lo vamos a realizar por división

| | |
|---|---|
| $3x^2$ | $x - 1$ |
| $-3x^2+3x$ | $3x + 3$ |
| $0 \quad + 3x$ | |
| $-3x+3$ | |
| $-1$ | |

La A.O. de f(x) es **y = 3x + 3** en $\pm\infty$.
Veámoslo también con límites.

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{x\cdot(x-1)}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{x^2 - x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty}(3) = 3$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{x-1} - 3x)\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2 - 3x^2 + 3x}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}(3) = 3$$

Efectivamente la A.O. de f(x) era **y = 3x + 3** en $\pm\infty$.

Como $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x^2}{x-1} - (3x+3)\right) = 0^-$, f(x) está por debajo de la A.O. en $+\infty$ (le damos a x el valor + 100)

Como $\lim_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x^2}{x-1} - (3x+3)\right) = 0^+$, f(x) está por encima de la A.O. en $-\infty$ (le damos a x el valor - 100)

Si hay es este caso A.O no hay asíntotas horizontales (A.H.)

*Veamos ahora los extremos, pero lo haremos con la monotonía de f.*

Me están pidiendo el estudio de f '(x)

$f(x) = \dfrac{3x^2}{x-1}$; $f'(x) = \dfrac{6x\cdot(x-1) - (3x^2)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{6x^2 - 6x - 3x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{3x^2 - 6x}{(x-1)^2}$.

Si $f'(x) = 0 \to 3x^2 - 6x = 0 = x\cdot(3x - 6) = 0$, de donde **x = 0 y x = 2, que serán los posibles extremos relativos**.

Como f '(-1) = 9/(+) > 0, luego f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(-\infty, 0)$

Como f '(0'5) = -2'25/(+) < 0, luego f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en $(0, 2) - \{1\}$

Como f '(2) = 9/(+) > 0, luego f(x) es estrictamente creciente $(\nearrow)$ en $(2,+\infty)$

**Por definición en x = 0 hay un máximo relativo que vale f(0) = 0.**
**Por definición en x = 2 hay un mínimo relativo que vale f(2) = 12.**

**2.-** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 2 \\ m-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcular los valores del parámetro m para los cuales la matriz A tiene inversa. (1 ptos)
b) Para m = 1, calcular la matriz inversa $A^{-1}$ (1,5 ptos)

a)
Calcular los valores del parámetro m para los cuales la matriz A tiene inversa.

Sabemos que si $\det(A) = |A| \neq 0$, A tiene matriz inversa $A^{-1}$.

Tenemos $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m+1 & 2 \\ m-2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{matrix} = +(m-2)\cdot(-m-1-0) = (m-2)\cdot(m+1)$.

Si $|A| = 0$, tenemos $(m-2)\cdot(m+1) = 0$, de donde $m = 2$ y $m = -1$, por tanto **para $m \neq -1$ y $m \neq 2$ la matriz A tiene matriz inversa $A^{-1}$.**

b)

Para m = 1, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y la matriz inversa pedida es $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

Tenemos del apartado (a) $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (1-2)\cdot(1+1) = (-1)\cdot(2) = -2 \neq 0$, existe la matriz inversa

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

Tenemos $|A| = 2$; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa es $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) =$

$= \frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**3.-** Dados los planos $\pi_1 \equiv x+y+z-5=0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x=3+\lambda+2\mu \\ y=1-\lambda-\mu \\ z=1+\mu \end{cases}$

a) Comprobar que los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ se cortan en una recta. Hallar la ecuación de dicha recta en forma paramétrica. (1,75 ptos)

b) Hallar la ecuación del plano $\pi_3$ que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos $\pi_1$ y $\pi_2$. (0,75 puntos)

a)

Comprobar que los planos $\pi_1$ y $\pi_2$ se cortan en una recta. Hallar la ecuación de dicha recta en forma paramétrica.

Los dos planos se cortan en una recta si sus vectores normales no son proporcionales, en cuyo caso serían paralelos.

Ponemos el plano $\pi_2 \equiv \begin{cases} x=3+\lambda+2\mu \\ y=1-\lambda-\mu \\ z=1+\mu \end{cases}$ en forma continua $\pi_2 \equiv$ det(**AX**, **u**, **v**) = det(**x** - **a**, **u**, **v**) =

$= \begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ = 0 = (x - 3)(1 - 0) - (y - 1)(1 - 0) + (z - 1)(1 - 2) = 0 = **x - y - z - 1 = 0**, por tanto su vector normal $\mathbf{n_2}$ = (1, -1, -1).

El vector normal de $\pi_1$ es $\mathbf{n_1}$ = (1, 1, 1). Evidentemente los vectores normales no son proporcionales y los vectores se cortan en una recta r cuya ecuación general es $r \equiv \begin{cases} x+y+z=5 \\ x-y-z=1 \end{cases}$. Como me piden la ecuación paramétrica, sumamos las dos ecuaciones y nos queda 2x = 6, de donde **x = 3**, luego de la 1ª ecuación tenemos y + z = 2. Tomando **z = b** $\in$ R, obtengo **y = 2 – b.**

**La ecuación paramétrica pedida es r** $\equiv \begin{cases} x=3 \\ y=2-b \\ z=\quad b \end{cases}$ **con z = b** $\in$ **R**

b)

Hallar la ecuación del plano $\pi_3$ que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos $\pi_1$ y $\pi_2$.

Para el plano $\pi$ necesitamos un punto, el origen O(0, 0, 0) y dos vectores independientes, uno el normal de $\pi_1$ que es $\mathbf{n_1}$ = (1, 1, 1) y el otro el normal del plano $\pi_2$, el $\mathbf{n_2}$ = (1, -1, -1).

El plano pedido es $\pi_3 \equiv$ det(**OX**, **u**, **n**) = det(**x** - **o**, $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$) = $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ = 0 = (x)(-1+1) - (y)(-1+1) + (z)(-1 -1) =

= 0 = **-2z = 0**.

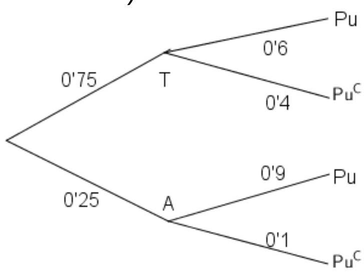
**4.-** El 75% de los alumnos de un instituto acude a clase en algún tipo de transporte y el resto acude andando. Por otra parte, llegan puntual a clase el 60% de los que utilizan transporte y el 90% de los que acuden andando. Se pide:
a) Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya llegado puntual a clase? (1.25 ptos)
b) Si se elige al azar uno de los alumnos que ha llegado puntual a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya acudido andando? (1.25 ptos)

a)
Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya llegado puntual a clase?

Llamemos T, A, Pu y $Pu^C$, a los sucesos siguientes, “algún tipo de transporte”, "andando", "llega puntual" y "no llega puntual", respectivamente.

Datos del problema: p(T) = 75% = 0’75; p(Pu/T) = 60% = 0’6 ; p(Pu/A) = 90% = 0’9, ...

Todo esto se ve mejor en el siguiente diagrama de árbol (completamos las probabilidades sabiendo que la suma de las que parten de un mismo nodo vale 1).




Por el teorema de la Probabilidad Total:
Me piden **p(Pu) =** p(T).p(Pu/T) + p(A).p(Pu/A) = (0’75)·(0’6) + (0’25)·(0’9) **= 27/40 = 0’675**.
b)
Si se elige al azar uno de los alumnos que ha llegado puntual a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya acudido andando?

Me piden **p(A/Pu)**.
Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

$$\mathbf{p(A/Pu) =} \frac{p(A \cap Pu)}{p(Pu)} = \frac{p(A)\cdot p(Pu/a)}{0'675} = \frac{(0'25)\cdot(0'9)}{0'675} \mathbf{= 1/3 \cong 0'33333}.$$